ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE COMPIEGNE

CONCOURS D'ADMISSION 1988 — Option : - Générale — Coefficient : 4

MATHEMATIQUES I — Mercredi 11 Mai 1988 de 8 H 00 à 12 H 00

EXERCICE

Soit f la fonction numérique de la variable réelle definie

sur l'intervalle [0,1[par : $f(x) = x$

et pour tout élément x de $\mathbb{R}$ par : $2f(x+1) = f(x)$

1° Calculer f(2) et f(¶).

2° Pour tout x_0 , élément de l'intervalle [0,1[et pour tout nombre entier naturel n, donner l'expression de $f(x_0 + n)$ en fonction de n et $f(x_0)$

3° Pour tout x, élément réel de l'intervalle [n, n+1 [, n étant un nombre entier naturel, expliciter f(x).

4° Construire la courbe représentative de f, dans un repère orthonormé sur l'intervalle [-3, 4[.

(on prendra comme unité graphique : 2 cm)

5° On pose, pour tout n entier naturel : $I_n = \int_n^{n+1} f(x)\,dx$.

Déterminer une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.

6° Exprimer I_n en fonction de I_0 .

7° En déduire la valeur de I_n.

8° Retrouver cette valeur en calculant directement I_n.

PROBLEME

NOTATIONS

1° $\mathcal{M}$ est l'algèbre des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

On rappelle les notations classiques :

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour tout élément X non nul de $\mathcal{M}$ et pour tout n entier naturel, on a

$$X^n = X^{n-1} \cdot X \qquad \text{pour } n > 0$$

et $X^0 = I$

2° On donne les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et } V = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3° E est le sous-ensemble de $\mathcal{M}$ formé des matrices

$M(x,y) = xA + yI$ où x et y sont des réels

4° On considère l'application φ qui, à toute matrice X de $\mathcal{M}$ fait correspondre

$\varphi(X) = U.X.V$

5° Pour tout entier naturel n, on considère la suite α définie par :

$$\alpha_n = \frac{1}{5}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

6° Pour tout entier naturel n, on considère la suite β définie par la relation de récurrence :

$$\beta_{n+2} + \beta_{n+1} - \beta_n = 0 \qquad (r)$$

et les conditions initiales : $\beta_0 = 1$

$\beta_1 = -1$

T.S.V.P.

PARTIE 1

1° a) Démontrer l'unicité de la suite β .

b) Démontrer que la suite α vérifie la relation de récurrence (r)

c) Calculer α_0 et α_1 - conclusion -

d) En déduire que α_n est un entier relatif.

e) En utilisant la formule du binôme, donner l'expression de α_n sans utiliser $\sqrt{5}$

2° a) Pour d et λ réels fixés ($d \neq 0$), résoudre le système S d'inconnues a, b, c, réelles, défini par :

$$S \begin{cases} (2-\lambda)\,a + 2\,b - c = d & (1) \\ 2\,a + (4-\lambda)\,b - c = 2d & (2) \\ -\,a - b + (1-\lambda)\,c = -d & (3) \end{cases}$$

b) Déterminer une relation vérifiée par λ pour que de plus , on ait :

$$-a - 2b + c + (2-\lambda)\,d = 0 \qquad (4)$$

c) Calculer a, b, et c pour

$$\lambda_3 = \frac{7+3\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad d = -3-\sqrt{5}$$

Ecrire dans ce cas, la matrice : $X_3 = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

3° a) Montrer que le polynôme :

$$P(\lambda) = \lambda^4 - 9\lambda^3 + 16\lambda^2 - 9\lambda + 1$$

admet 1 comme racine double.

b) Résoudre $P(\lambda) = 0$

PARTIE 2

1° Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}$

2° Montrer que (A, I) forme une base de E

3° Démontrer que E est invariant par φ.

4° Calculer : $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, et $\varphi(X_3)$.

5° Montrer que $\varphi(X_3) = \lambda_3 \cdot X_3$

PARTIE 3

1° Démontrer que φ est une application linéaire; déterminer son noyau et son espace-image.

2° Montrer que φ réalise une bijection et donner l'expression de son application réciproque notée φ^{-1}.

3° Démontrer que pour tout couple (X,Y) d'éléments de $\mathbb{M}^2$:

$$\varphi(X,Y) = \varphi(X) \cdot \varphi(Y)$$

PARTIE 4

1° Calculer les valeurs propres de φ et leur ordre de multiplicité.

2° Déterminer pour chaque valeur propre, le sous-espace vectoriel propre correspondant (on donnera une base).

PARTIE 5

1° Calculer A^2 , A^3 et A^4

2° Démontrer que :

$$A^{n+2} = \begin{pmatrix} u_{n+2} & u_{n+1} \\ u_{n+1} & u_n \end{pmatrix}$$

où u_n est le terme général d'une suite u.

3° Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite u.

4° Démontrer que pour tout couple (m,n) d'éléments de $\mathbb{N}^2$ on a :

$$u_{m+n+2} = u_{m+1} \cdot u_{n+1} + u_m \cdot u_n$$

5° Donner l'expression de A^n en fonction de n

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail